

# Chapitre 8

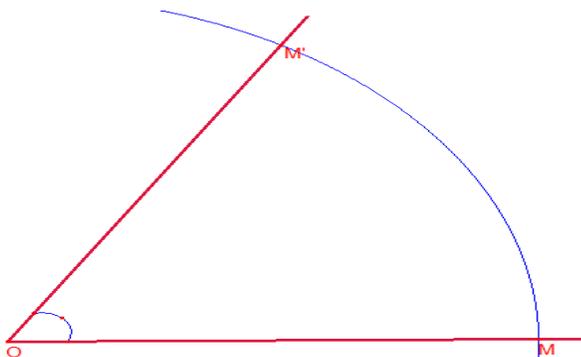
## La rotation dans le plan

### I. Rotation

#### 1- Rotation

**Déinition 1.** Soit O un point du plan. La rotation  $r$  de centre O et d'angle  $\alpha$  transforme un point M en un point image  $M'$  tel que :

$$\begin{cases} OM' = OM \\ (\vec{OM}, \vec{OM}') = \alpha [2\pi] \end{cases}$$



On note parfois  $r_{(O;\alpha)}$  la rotation de centre O et d'angle  $\alpha$  ou  $r_o$  et on précise l'angle de rotation. D'après le figure ci-dessus  $r_{(O;\alpha)}(M) = M'$

#### Remarques 1.

- 1) L'image du centre O est O (on dit que le point O est invariant),
- 2) Les rotations d'angle  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  sont appelées quarts de tour direct,
- 3) Les rotations d'angle  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  sont appelées quarts de tour indirect,
- 4) La rotation de centre O et d'angle  $\alpha = \pi$  est la symétrie centrale par rapport à O.

**Exemple 1.** ABCD est un carré de sens direct de centre O. Soit  $r_A$  la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $r_O$  une rotation de centre O et d'angle  $\alpha$ .

- 1) Déterminer  $r_A(A)$ ;  $r_A(B)$ ;  $r_A(D)$ ,
- 2) Comment choisir  $\alpha$  pour avoir  $r_O(A) = B$ ? Comment choisir  $\alpha$  pour avoir  $r_O(A) = C$ ?

## 2- Formule Analytique d'une Rotation

Soit  $\Omega$  un point du plan  $\mathcal{P}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors la rotation d'angle  $\theta$  et de centre  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} R : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

tels que :

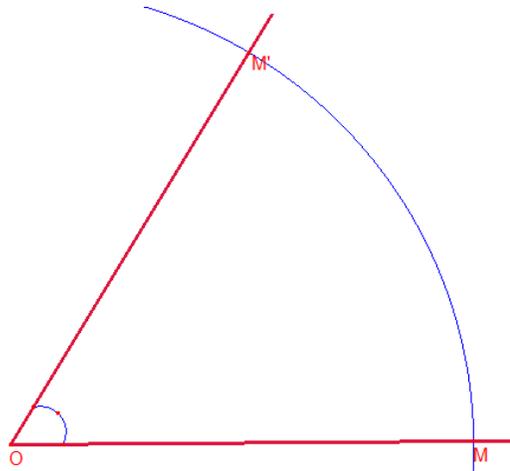
$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi]. \end{cases}$$

On a :

$$R(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi]. \end{cases}$$

### 3 - Rotation réciproque

**Définition 1** Soit  $r$  une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$ . La rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\alpha$  est appelée rotation réciproque de  $r$ . On la note  $r^{-1}$ .



D'après le figure ci-dessus on a :  $r_O^{-1}(M') = M$ .

## II - Caractérisations et Propriétés de Rotation

### 1- Les caractéristiques de Rotation

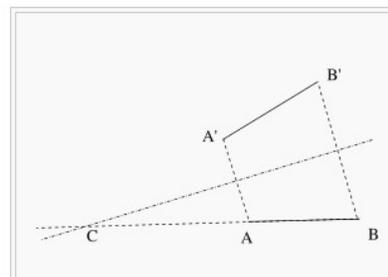
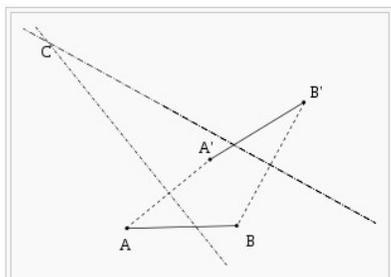
Une rotation peut donc être caractérisée par l'image de deux points : Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts et  $A'$ ,  $B'$  deux points tels que  $AB = A'B'$

avec  $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ , il existe une unique rotation  $r$  qui transforme  $A$  en  $A'$  et  $B$  en  $B'$ .

Cette rotation pour angle  $\theta = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})$ , et pour centre l'intersection des médiatrices de  $[AA']$  et  $[BB']$  (si elles se coupent) ou bien le point d'intersection de  $(AB)$  et de la médiatrice de  $[AA']$  (si les médiatrices ne sont pas sécantes).

Il n'est pas nécessaire de connaître le centre de la rotation pour construire l'image  $M'$  du point  $M$  (distinct de  $A$ ) car celui-ci vérifie les deux conditions suivantes :

$$AM = A'M' \text{ et } (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{A'M'}) = \theta$$



## 2-Propriétés de Rotation

**Propriété 1.** La rotation conserve :

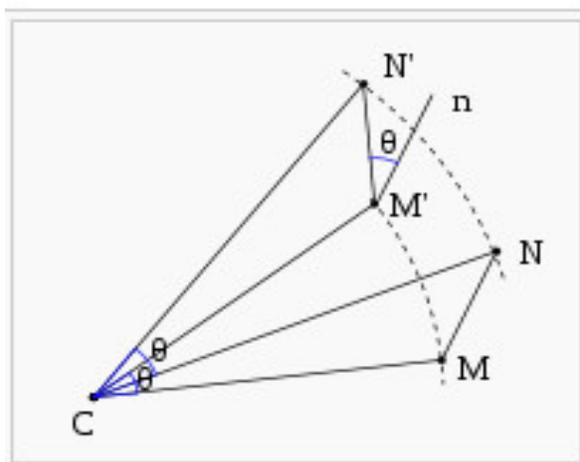
- les longueurs ;
- les angles (l'image d'un angle est un angle de même amplitude) ;
- les parallèles (les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles) ;
- les aires (l'image d'une figure est une figure de même aire).

**Propriété 2.** soient  $M$  et  $N$  deux points du plan distincts. On note  $M'$  et  $N'$  leurs images respectives par la rotation de centre  $c$  et d'angle  $\theta$ . Alors :

$$MN = M'N'$$

$$(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}) = \theta \quad [2\pi]$$

*Démonstration.*



Les triangles CMN et CM'N' sont isométriques de même orientation car

$$CM = CM'$$

$$CN = CN'$$

$$(\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CN}) = (\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CM'}) + (\overrightarrow{CM'}; \overrightarrow{CN'}) + (\overrightarrow{CN'}; \overrightarrow{CN}) = \theta + (\overrightarrow{CM'}; \overrightarrow{CN'}) - \theta = (\overrightarrow{CM'}; \overrightarrow{CN'})$$

Donc, en particulier :

$$MN = M'N'$$

$$(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{M'N'}; \overrightarrow{M'C'})$$

Une relation de Chasles sur les angles permet alors d'écrire :

$$(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{M'C'}) + (\overrightarrow{M'C'}; \overrightarrow{M'N'})$$

les deux angles extrêmes s'annulent et celui du milieu vaut  $\theta$  donc

$$(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}) = \theta$$

**Propriété 3.** une rotation transforme trois points alignés dans un ordre en trois points alignés dans le même ordre.

*Démonstration.* soient A, B et C trois points du plan alignés dans cet ordre et A' B' C' leurs image par la rotation de centre o et d'angle  $\theta$  alors :

$$AB = A'B' \text{ et } BC = B'C' \text{ et } AC = A'C'$$

$$AB + BC = AC$$

c'est a dire :

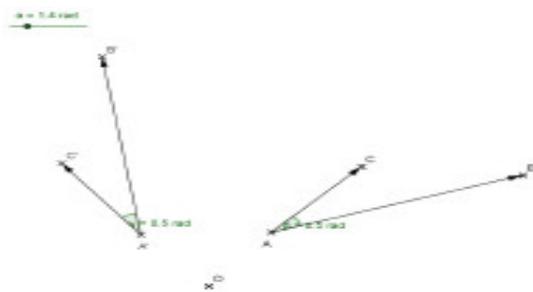
$$A'B' + B'C' = A'C'$$

les trois point A' et B' et C' sont aligné dans cet ordre .

**Propriété 4.** soient A, B et C trois points du plan distincts. On note A', B' et C' leurs images respectives par la rotation de centre O et d'angle  $\alpha$ .

Alors :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'})$$



Démonstration. on a :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'}) + (\overrightarrow{A'C'}; \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Or : } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) = \alpha \text{ et } (\overrightarrow{A'C'}; \overrightarrow{AC}) = -\alpha$$

On obtient :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'})$$

### 3 - Image d'une droite, d'un segment et d'un cerle par une rotation :

**Propriété 1.** Soit  $r$  une rotation. Soit  $A$  et  $B$  deux points tels que  $A \neq B$ . Alors on a :

- (i) l'image de la droite  $(AB)$  par la rotation  $r$  est la droite  $(A'B')$  telle que  $r(A) = A'$  et  $r(B) = B'$ .
- (ii) L'image du segment  $[AB]$  est le segment  $[A'B']$  telle que  $r(A) = A'$  et  $r(B) = B'$ .
- (iii) l'image du cercle  $\mathcal{C}(O, R)$  par la rotation  $r$  est le cercle  $\mathcal{C}(O', R)$  telle que  $r(O) = O'$  (Voir figure ci-dessous).

